14. Условные распределения и математические ожидания

14.1. Предварительные сведения

Пусть (ξ, η) — дискретный случайный вектор с совместным распределением $p_{ij} = \mathbb{P}(\xi = x_i, \eta = y_j)$.

Условное распределение ξ относительно событий $\{\eta = y_j\}$ положительной вероятности $\mathbb{P}(\eta = y_j) > 0$ есть распределение $\mathbb{P}(\xi = x_i \mid \eta = y_j) = \frac{\mathbb{P}(\xi = x_i, \eta = y_j)}{\mathbb{P}(\eta = y_j)} = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}} = p_{i|j}$, где $p_{\cdot j} = \sum\limits_i p_{ij}$.

Условное математическое ожидание $\mathbb{E}(\xi \mid \eta = y_j)$ дискретной величины ξ есть число $\sum\limits_i x_i p_{i|j}$.

Условное математическое ожидание $\mathbb{E}(\xi \mid \eta)$ дискретной величины ξ есть случайная величина с распределением:

$\mathbb{E}(\xi \mid \eta)$	$\mathbb{E}(\xi \mid \eta = y_1)$	$\mathbb{E}(\xi \mid \eta = y_1)$	$\ldots$
$\mathbb{P}$	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	$\ldots$

Пусть (ξ, η) — абсолютно непрерывный случайный вектор с совместной плотностью $p_{\xi,\eta}(x, y)$.

Условная плотность величины ξ при условии $\eta = y$ равна $p_\xi(x \mid \eta = y) = \frac{p_{\xi,\eta}(x,y)}{p_\eta(y)}$.

Условное математическое ожидание $\mathbb{E}(\xi \mid \eta = y)$ находится по формуле

$$\mathbb{E}(\xi \mid \eta = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x p_\xi(x \mid \eta = y)\, dx = f(y).$$

Условное математическое ожидание $\mathbb{E}(\xi \mid \eta)$ равно $f(\eta)$.

Формула полной вероятности имеет вид: $\mathbb{E}\mathbb{E}(\xi \mid \eta) = \mathbb{E}\xi$.

14.2. Практическое занятие

1. Пусть пространство элементарных исходов $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$, а вероятность задана соотношениями $\mathbb{P}(\omega_i) = 1/6$, $i = 1, \ldots, 6$. Случайные величины ξ и η определены правилами:

$$\xi(\omega_i) = i, \qquad \eta(\omega_1) = \eta(\omega_3) = \eta(\omega_5) = 1, \quad \eta(\omega_2) = \eta(\omega_4) = 2, \quad \eta(\omega_6) = 3.$$

Требуется:

1) найти распределения ξ и η;

2) вычислить математическое ожидание ξ;

3) выписать таблицу совместного распределения (ξ, η);

4) выписать условные распределения ξ относительно событий $\{\eta = 1\}$, $\{\eta = 2\}$ и $\{\eta = 3\}$;

5) найти условные математические ожидания $\mathbb{E}(\xi \mid \eta = 1)$, $\mathbb{E}(\xi \mid \eta = 2)$, $\mathbb{E}(\xi \mid \eta = 3)$ и сравнить их с $\mathbb{E}\xi$;

6) найти распределение условного математического ожидания $\mathbb{E}(\xi \mid \eta)$;

7) проверить формулу полной вероятности.

2. Некоторое насекомое откладывает случайное число яиц η, распределенное по закону Пуассона $\mathrm{Pois}(\lambda)$. Через некоторое время каждое яйцо независимо от других превращается в личинку с вероятностью $p > 0$. Пусть ξ — количество появившихся личинок. Найти распределение и среднюю численность потомства.
Ответ. $\xi \sim \mathrm{Pois}(\lambda p)$, $\mathbb{E}\xi = \lambda p$.
3. Стержень единичной длины наудачу разламывается на две части, после чего бо́льшая из частей снова наудачу разламывается на две части. Какова вероятность того, что из полученных обломков стержня можно составить треугольник?
Ответ. $2\ln 2 - 1 \approx 0.386$.

14.3. Домашнее задание

4. Случайная точка с координатами (ξ, η) равномерно распределена в треугольнике с вершинами в точках с координатами $(0,0)$, $(1,0)$ и $(0,1)$. Найти условную плотность $p_\xi(x \mid \eta = y)$ и условное математическое ожидание $\mathbb{E}(\xi \mid \eta = y)$. Чему равно $\mathbb{E}(\xi \mid \eta)$? Согласуются ли эти ответы с вашими интуитивными представлениями?
Ответ. $p_\xi(x \mid \eta = y) = \begin{cases} \frac{1}{1-y}, & 0 \le x \le 1 - y, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$ $\mathbb{E}(\xi \mid \eta = y) = \frac{1-y}{2}$, $\mathbb{E}(\xi \mid \eta) = \frac{1-\eta}{2}$.
5. Случайные величины ξ и η независимы и одинаково распределены. Найти $\mathbb{E}(\xi \mid \xi + \eta = z)$.
Ответ. $z/2$.
6. Случайная величина $\xi_1 \sim \mathrm{Bin}(n, p)$. Случайная величина ξ_2 при условии ξ_1 имеет распределение $\mathrm{Bin}(\xi_1, p)$. Случайная величина ξ_3 при условии ξ_2 имеет распределение $\mathrm{Bin}(\xi_2, p)$ и т.д. Доказать, что безусловное распределение ξ_k есть $\mathrm{Bin}(n, p^k)$.
Указание. Сначала доказать, что $\xi_2 \sim \mathrm{Bin}(n, p^2)$, а потом использовать индукцию.